

© Л.Н. СОКОЛЮК, С.П. РОДИОНОВ

rodionovsp@bk.ru

УДК 532.546, 622.276

**МЕТОД РАСЧЕТА НАИЛУЧШЕГО ВАРИАНТА ОБЪЕДИНЕНИЯ  
СЛОЕВ ГЕОЛОГИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ НА ОСНОВЕ МИНИМИЗАЦИИ  
ПОГРЕШНОСТИ АПСКЕЙЛИНГА\***

*АННОТАЦИЯ. В статье предложен эффективный метод определения вариантов объединения слоев геологической модели в слои гидродинамической модели на основе минимизации погрешности численных расчетов.*

*SUMMARY. In article the effective method of definition of variants of association of layers of geological model in layers of hydrodynamic model on the basis of minimization of an error of numerical calculations is offered.*

*КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА. Апскейлинг, геологическая модель, гидродинамическая модель.*

*KEY WORDS. Upscaling, reservoir model, geocellular model.*

**Введение.** Наиболее часто при upscaling'e производят объединение слоев геологической модели. В этом случае сохраняется регулярная структура сетки гидродинамической модели. На практике процедура выбора наилучшего варианта объединения слоев делается вручную, когда из множества вариантов выбирается тот, для которого погрешность, рассчитанная с помощью гидродинамического симулятора, имеет наименьшее значение. Погрешность характеризует отклонение расчетов на геологической и гидродинамической сетках, т.е. до и после upscaling'a. При этом для расчетов выбирается, как правило, не вся геологическая модель месторождения, а специально подобранный «типичный» участок.

С помощью предложенного в [1] способа расчета погрешности можно существенно сократить вычислительные затраты и автоматизировать выбор наилучшего варианта выделения слоев, используя при этом данные всей геологической модели. Настоящая работа посвящена разработке метода построения гидродинамической сетки с минимальным значением погрешности при upscaling'e.

**Описание метода.** Пусть геологическая модель (т.е. модель до upscaling'a) состоит из  $N_0$  последовательно прилегающих друг к другу горизонтальных слоев ячеек с номерами  $l=1,2,\dots,N_0$ . Слои в декартовой системе координат расположены по вертикальной оси  $x_3$ , причем каждый слой содержит по оси  $x_3$  одну ячейку. Количество ячеек по каждой из горизонтальных осей  $x_1$  и  $x_2$  одинаково для всех слоев. Множество вариантов объединения  $N_0$  слоев геологиче-

\* Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента Российской Федерации для государственной поддержки ведущих научных школ РФ (НШ-834.2012.1).

ской модели в  $N$  ( $1 \leq N \leq N_0$ ) слоев гидродинамической модели будем характеризовать следующими матрицами  $W^N$ , состоящими из  $N$  строк и 3-х столбцов:

$$W^N = [W_1^N, \dots, W_l^N, \dots, W_N^N]^T, \quad W_l^N = \begin{bmatrix} 1 & w_{l,2}^N & w_{l,3}^N \end{bmatrix} \quad (N=1, \dots, N_0).$$

Здесь и далее индексом  $N$  сверху отмечены величины, относящиеся к гидродинамической модели, содержащей  $N$  слоев. Строка с номером  $l$  матрицы  $W^N$ ,  $W_l^N = \begin{bmatrix} 1 & w_{l,2}^N & w_{l,3}^N \end{bmatrix}$  означает, что  $l$ -ый слой ( $1 \leq l \leq N$ ) гидродинамической модели включает в себя с  $w_{l,2}^N$  -го по  $w_{l,3}^N$  -ый слои геологической модели. Элементы матриц  $W^N$  обладают следующими свойствами:

$$N=N_0: w_{l,2}^N = w_{l,3}^N = l \quad (l=1, \dots, N_0); \quad (1)$$

$$N=2, \dots, N_0-1: w_{l,2}^N = 1 \quad (l=1); \quad w_{l,2}^N = w_{l-1,3}^N + 1 \quad (l=2, \dots, N_0); \quad w_{l,3}^N = N_0 \quad (l=N_0);$$

$$N=1: w_{l,2}^N = 1 \quad (l=1); \quad w_{l,3}^N = N_0 \quad (l=1).$$

Ясно, что первый элемент второго столбца и последний элемент третьего столбца при любом  $N$  принимают значения соответственно 1 и  $N_0$ . Поскольку слои не пересекаются, то  $w_{l,2}^N = w_{l-1,3}^N + 1$  ( $l=2, \dots, N$ ) и, таким образом, каждая из матриц  $W^N$  определяется натуральными числами  $w_{l,3}^N$  ( $l=1, \dots, N$ ), из которых  $N-1$  являются независимыми. Матрица  $W^{N_0}$  соответствует преобразованию геологической модели самой в себя, а матрица  $W^1$  — преобразованию геологической модели в гидродинамическую модель с одним слоем, т.е. в двумерную модель. Эти две матрицы известны априори.

Согласно [1], целевой функционал для модели в целом представляется в виде суммы функционалов по отдельным крупным ячейкам. Поэтому функционал модели, состоящей из  $N$  слоев ( $J^N$ ), равен сумме функционалов по отдельным слоям, а функционал для отдельного слоя ( $J_l^N$ ), в свою очередь, равен сумме функционалов для входящих в него крупных ячеек:

$$J^N = \sum_{l=1}^N J_l^N, \quad J_l^N = \sum_l \bar{V}_l \quad (J^{N_0} = 0). \quad (2)$$

Здесь  $\bar{V}_l$  — погрешность для крупной ячейки с номером  $l$ , образовавшейся в результате объединения с  $w_{l,2}^N$  -го по  $w_{l,3}^N$  -ый слоев геологической модели в  $l$ -ый слой гидродинамической модели. Из (2) следует, что функционал  $N$ -слойной гидродинамической модели определяется матрицей  $W^N$  ( $J^N = J^N(W^N)$ ), а функционал  $l$ -го слоя этой модели —  $l$ -ой строкой  $W_l^N$  матрицы  $W^N$  ( $J^N = J_l^N(W_l^N)$ ).

При объединении слоев ячейки укрупняются только по вертикали, в направлении 3 (рис. 1). Количество мелких ячеек в крупной ячейке в направлениях 1 и 2 в этом случае обычно равно  $n_1=n_2=1$ , а в направлении 3 —  $n_3>1$ .

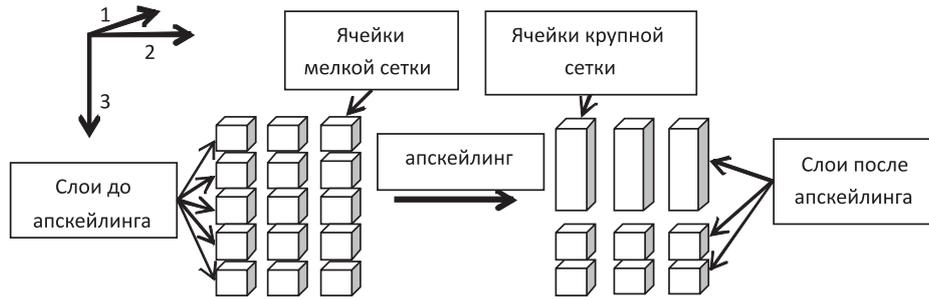


Рис. 1. Схематическое представление одного из вариантов объединения ячеек геологической модели, состоящей из 5-ти слоев, в ячейки гидродинамической модели из 3-х слоев. Количество мелких ячеек в слое из крупных ячеек по направлениям 1÷3:  $n_1=n_2=1, n_3=3$

Обобщенная на трехмерный случай формула для  $\bar{V}_l$  из [1] применительно к рассмотренному выше сценарию объединения слоев принимает вид:

$$\bar{V}_l = \|\bar{V}_{m,l}\| = \frac{1}{3}(\bar{V}_{1,l} + \bar{V}_{2,l} + \bar{V}_{3,l}) \quad (m=1\div 3),$$

где

$$\bar{V}_{1,l} = \bar{V}_{2,l} = V_p \sum_{i3=1}^{n3} \left| \frac{V_{p,i3}}{V_p} - \frac{T_{i3}}{T} \right|, \quad \bar{V}_{3,l} = \frac{1}{2} \left( V_p - \frac{1}{V_p} \sum_{i3=1}^{n3} V_{p,i3}^2 \right) \quad (3)$$

$$T = \sum_{i3=1}^{n3} T_{i3}, \quad T_{i3} = T_{1,i3} = T_{2,i3}, \quad T_{m,i3} = k_{m,i3} \Delta s_{m,i3} / \Delta x_{m,i3},$$

$$V_{p,i3} = \phi_{i3} V_{i3} (1 - S_{wc} - S_{or})_{i3}, \quad V_p = \sum_{i3=1}^{n3} V_{p,i3}.$$

Здесь для  $i3$ -ой мелкой ячейки:  $T_{m,i3}$ ,  $k_{m,i3}$ ,  $\Delta s_{m,i3}$ ,  $\Delta x_{m,i3}$  — соответственно проводимость, проницаемость, площадь поперечного сечения и размер вдоль координаты  $x_m$  ( $m=1, 2$ );  $V_{m,i3}$  — подвижный объем;  $V_{i3}$  — геометрический объем;  $\phi_{i3}$  — пористость;  $S_{w,i3}$ ,  $S_{or,i3}$  — критические насыщенности фаз.

С помощью матриц  $W^N$  можно оценивать качество up'scaling'a. Для этого необходимо подставить в (2) предполагаемые варианты объединения слоев и сравнить значения соответствующих функционалов. Однако наибольший интерес представляет определение такой матрицы  $W^N$ , при которой функционал (2) принимает минимальное значение на определенном множестве объединений слоев. Рассмотрим следующий метод решения этой задачи.

Объединение  $N_0$  слоев в  $N$  слоев можно представить в виде последовательного выполнения  $i=1, \dots, N_0-N$  шагов. На  $i$ -ом шаге объединяются только какие-либо два соседних слоя, которые выбираются из  $N(i-1)=N(i)+1$  слоев, имевшихся на предыдущем  $i-1$ -ом шаге. Поскольку на данном шаге число слоев на один

меньше, чем на предыдущем, то на  $i$ -ом шаге имеется  $N(i)=N_0-i$  слоев ( $i=1, \dots, N_0-N$ ) и  $N_0-i-1$  возможных вариантов объединений двух соседних слоев.

Если вариант объединения двух слоев в один выбран, тогда остальные слои не объединяются и остаются такими же, как и на предыдущем шаге. Следовательно, соответствие номеров слоев на  $i-1$ -ом и  $i$ -ом шагах, когда слои  $l(i-1)$  и  $l(i-1)+1$  объединяются в один  $l^*(i)$ -ый слой, можно представить в виде

$$l(i) \rightarrow l(i-1); l^*(i) \rightarrow l(i-1) \cup l(i-1)+1; l(i) \rightarrow l(i-1)+1,$$

где номера  $l(i)$  и  $l(i-1)$  могут принимать значения из интервалов соответственно  $l(i)=1, \dots, N(i)$  и  $l(i-1)=1, \dots, N(i-1)$ . Поэтому когда на  $i$ -ом шаге объединяются два слоя с номерами  $l(i-1)$  и  $l(i-1)+1$  в один слой с номером  $l^*(i)$ , строки матрицы  $W^{N(i)}$ , неизвестной на данном шаге, выражаются через элементы матрицы  $W^{N(i-1)}$ , известной на предыдущем шаге, следующим образом:

$$W_i^{N(i)} = \begin{bmatrix} l & w_{l,2}^{N(i)} & w_{l,3}^{N(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l & w_{l,2}^{N(i-1)} & w_{l,3}^{N(i-1)} \end{bmatrix} = W_i^{N(i-1)}, J_i^{N(i-1)} = J_i^{N(i)} \quad (l=1, \dots, l^*);$$

$$W_i^{N(i)} = \begin{bmatrix} l & w_{l,2}^{N(i)} & w_{l,3}^{N(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l & w_{l,2}^{N(i-1)} & w_{l+1,3}^{N(i-1)} \end{bmatrix}, J_i^{N(i)} = J^{N(i-1)}(W_i^{N(i-1)}) \quad (l=l^*);$$

$$W_i^{N(i)} = \begin{bmatrix} l & w_{l,2}^{N(i)} & w_{l,3}^{N(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l & w_{l+1,2}^{N(i-1)} & w_{l+2,3}^{N(i-1)} \end{bmatrix} = W_{l+1}^{N(i-1)}, J_l^{N(i)} = J_{l+1}^{N(i-1)} \quad (l=l^*+1, \dots, N(i)).$$

Видно, что при переходе от  $i-1$ -го к  $i$ -му шагу строки матриц и значения функционалов для всех слоев за исключением  $l^*(i)$ -го не изменяются. С учетом этого обстоятельства и выражения (2) можно показать, что приращение функционала для модели в целом из-за образования нового  $l^*(i)$ -го слоя, получающегося в результате объединения  $l(i-1)$ -го и  $l(i-1)+1$ -го слоев, равно:

$$\delta J_{l^*(i)}^{N(i)} = (J^{N(i)} - J^{N(i-1)})_{l=l^*(i)} = J^{N(i)}(W_{l^*(i)}^{N(i)}) - J^{N(i-1)}(W_{l(i-1)}^{N(i-1)}) - J^{N(i-1)}(W_{l(i-1)+1}^{N(i-1)}) \geq 0. \quad (4)$$

Если в качестве управляющей переменной, определяющей тот или иной вариант объединения слоев на  $i$ -ом шаге, принять порядковый номер слоя  $l=l^*(i)$ , то вектор  $L^*=(l^*(1), \dots, l^*(i), \dots, l^*(N_0-N))$ , составленный из значений  $l^*(i)$  ( $i=1, \dots, N_0-N$ ) будет определять вариант объединения  $N_0$  слоев в  $N$  слоев.

При известном векторе  $L^*$  матрицы  $W^N$  и функционалы  $J^N$  ( $N=N_0-1, \dots, 2$ ) с помощью (1) и (2) могут быть легко определены пошагово. Отметим, что неизвестные (или свободные) компоненты вектора  $L^*$ , могут быть только при  $N_0 > 2$  и  $N > 1$ , т.к. матрицы  $W^{N_0}$  и  $W^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & N_0 \end{pmatrix}$  известны, а, значит, известны и функционалы  $J^1(W^1)$  и  $J^{N_0}(W^{N_0})=0$ . Если  $N=1$ , то  $l^*(N_0-N)=l^*(N_0-1)=1$ .

Если на каждом шаге  $i=1, \dots, N_0-N$  номера объединяемых слоев  $L^*$  выбирать, в частности, таким образом, чтобы элемент вектора приращений функционала  $\delta J_{l^*(i)}^{N(i)}$  при  $l=l^*(i)$  принимал наименьшее значение из множества приращений  $\delta J_l^{N(i)}$  ( $l=1, \dots, N(i)$ ), т.е:

$$l^*(i) = \min_l \delta J_l^{N(i)} \quad (i=1, \dots, N_0-N),$$

то функционал при объединении  $N_0$  слоев в  $N$  слоев будет принимать минимальное значение. Множество вариантов выбора пар слоев для объединения на каждом шаге определяется следующей матрицей:

$$\tilde{W}_l^{N(i)} = \begin{bmatrix} l & w_{l,2}^{N(i-1)} & w_{l+1,3}^{N(i-1)} \end{bmatrix} \quad l=1, \dots, N(i); \quad N(i)=N_0-i, \dots, N; \quad i=1, \dots, N_0-N. \quad (5)$$

Приращение функционала  $\delta J_l^{N(i)} = \delta J_l^{N(i)}(\tilde{W}_l^{N(i-1)})$  для каждого из этих вариантов ( $l=1, \dots, N(i)$ ) определяется выражением (4).

Рассмотрим следующий алгоритм, позволяющий определить наилучший вариант объединения  $N_0$  слоев в  $N$  слоев. Алгоритм состоит из  $N_0-N$  шагов ( $N_0 > 2, N > 1$ ).

Шаг  $i=0$ . На «нулевом» шаге ( $N=N_0$ ), задаются начальный вектор  $w_{l,3}^{N_0} = l$  и начальные значения погрешностей  $J_l^{N_0} = 0$  ( $l=1, \dots, N_0$ ). В соответствии с (5) рассчитывается вектор  $\tilde{W}^{N_0-1}$  для  $(N_0-1)$  возможных вариантов объединения пар соседних слоев. Затем для каждого из этих вариантов согласно (4) рассчитываются приращения функционала  $\delta J_l^{N(i)}$ .

Шаг  $i=i+1$ . Число слоев уменьшается на единицу ( $N \rightarrow N-1$ ). Из множества  $l=1, \dots, N(i)$  определяется номер слоя  $l=l^*(i)$  при котором  $\delta J_l^{N(i)}$  как функция  $l$  принимает наименьшее значение. Слои  $l(i-1)$  и  $l(i-1)+1$  объединяются и новому слою присваивается номер  $l^*(i)$ . Рассчитывается новый вектор  $w_{l,3}^{N(i)}$ . Для вновь образовавшегося слоя рассчитывается компонента вектора  $J_{l^*(i)}^{N(i)}$ . Если  $N > 1$ , то для двух или одного вариантов объединения слоев, граничащих с этим новым слоем, согласно (5) и (4) пересчитываются значения  $\tilde{W}_l^{N(i)}$  и  $\delta J_l^{N(i)}$ . Осуществляется переход к следующему шагу.

**Примеры работы алгоритма**

В качестве примера на рис. 2 приведено схематическое представление работы алгоритма для геологической модели, содержащей четыре слоя. На первом шаге объединяются слои 2 и 3, на втором шаге — слои 1 и 2 и на третьем шаге — 1 и 2. Заливкой отмечены слои, образующиеся в результате объединения слоев с предыдущего шага.

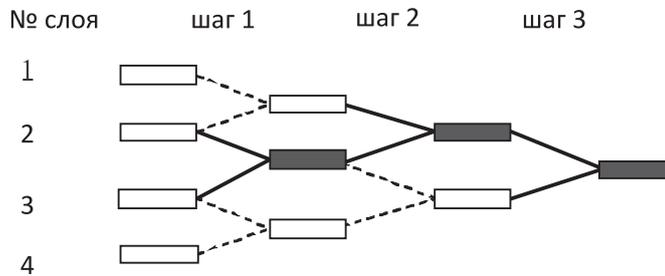


Рис. 2. Схематическое представление работа алгоритма для модели из четырех слоев

Для случая рис. 2 начальная матрица  $W^4$  и матрицы  $W$  соответственно на первом, втором и третьем шагах выглядят следующим образом:

$$W^4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \quad W^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \quad W^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \quad W^1 = (1 \quad 1 \quad 4).$$

Вектор  $L^*$  имеет вид:  $L^*=(l^*(1), l^*(2))$ , при этом  $l^*(1)=2, l^*(2)=1$ . Число слоев на каждом шаге принимает значения  $N(0)=4, N(1)=3, N(2)=2, N(3)=1$ .

Если число слоев  $N$  не является фиксированным, то предлагаемая методика может играть вспомогательную роль для определения необходимой детальности гидродинамической модели. Поскольку на каждом шаге число слоев уменьшается на 1, то в процессе выполнения шагов имеем последовательность гидродинамических моделей от исходной (геологической), с числом слоев  $N=N_0$ , до двумерной при  $N=1$ . Если сравнить минимальные значения функционалов для каждой из этих моделей

$$0 = J_{\min}^{N_0} \leq \dots \leq J_{\min}^{N+1} \leq J_{\min}^N \leq J_{\min}^{N-1} \leq \dots \leq J_{\min}^1, \quad (J_{\min}^{N_0} = J_{\max}^{N_0} = J^{N_0} = 0, J_{\min}^1 = J_{\max}^1 = J^1),$$

$$J_{\min}^N = J_{\min}^{N+1} + \delta J_{\min}^N \quad (N = N_0 - 1, \dots, 1),$$

то по виду функции  $J(N) = J_{\min}^N$  можно выбрать необходимую детальность гидродинамической модели. Оптимальное число слоев  $N$  выбирается исходя из компромисса между временными затратами на проведение расчетов и их точностью. В качестве безразмерного критерия погрешности можно использовать долю порового объема всего пласта  $J_{\min}^N / V_p$  или относительную погрешность  $\bar{J}(N) = J_{\min}^N / J^1$  ( $0 \leq \bar{J}(N) \leq 1$  при  $1 \leq N \leq N_0$ ).

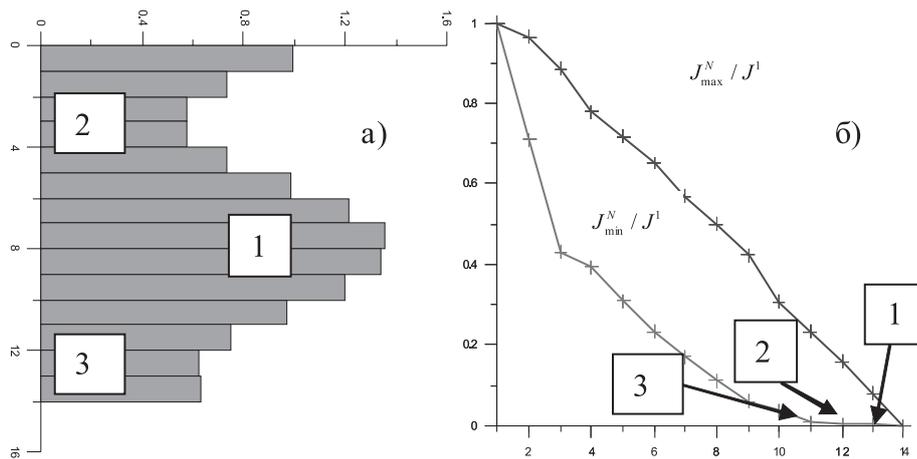


Рис. 3а-б. Зависимость минимальной  $J_{\min}^N / J^1$  и максимальной  $J_{\max}^N / J^1$  погрешностей от числа слоев  $N$  для геологической модели, состоящей из  $N_0=14$  слоев (б), имеющей профиль абсолютной проницаемости  $k(\text{мд}) \times 0.00864$  (а). Точки, отмеченные на рис. 3б цифрами 1÷3, соответствуют объединению пар слоев на рис. 3а

Применение алгоритма демонстрируется на следующем примере. Рассмотрим upscaling геологической модели пласта, содержащего 14 слоев. В ячейках каждого слоя задается постоянное значение проницаемости, но это значение для разных слоев — разное (см. рис. 3б). Размеры ячеек и пористость во всем пласте одинаковы.

На рис. 3б представлена зависимость  $J_{\min}^N / J^1$  от  $N$ . Видно, что слои, находящиеся в области экстремумов изображенной на рис. 3а функции распре-

деления относительной проницаемости, можно объединить без значительной потери точности. Для оценки чувствительности решения и для выявления слоев, наиболее неподходящих для объединения, можно использовать зависимость  $J_{\max}^N / J^1$ , также изображенной на рисунке 3б.

#### **Заключение**

Разработана методика определения погрешности огрубления геологической модели при upscaling'e. На основе этой методики возможно:

- 1) оценивать степень пригодности вариантов для объединения слоев геологической модели в слои гидродинамической модели;
- 2) решать задачу минимизации погрешности гидродинамической модели на множестве вариантов объединения мелких ячеек в крупные при заданном числе слоев гидродинамической модели;
- 3) получать зависимость минимальной/максимальной погрешности от числа слоев гидродинамической модели, на основе которой можно выбирать необходимую детальность гидродинамической модели, а также оценивать диапазон варьирования числа слоев для апскейлинга.

#### **СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Родионов С.П., Соколюк Л.Н. Вычисление функционала погрешности геолого-гидродинамической модели при upscaling'e // Вестник ТюмГУ. №6. 2010. С. 28-36.